Bull. Sci. math. 124, 6 (2000) 447–458

UNE DESCRIPTION DE LA COHOMOLOGIE DU COMPLÉMENT À UN DIVISEUR NON RÉDUCTIBLE DE $\mathbb{P}^2$

PAR

DAVID LUBICZ

Université de Bordeaux, Laboratoire de Mathématiques Pures, 351, cours de la Libération, 33405 Talence, France

Manuscrit présenté par G. HENKIN, reçu en Avril 1999, révisé en Juillet 1999

1. Introduction

L'objet de cet article est l'étude du plongement d'une courbe algébrique dans $\mathbb{P}^2$ par une description de la cohomologie à coefficients dans $\mathbb{C}$ de l'espace complémentaire.

Dans [7], P. Griffiths définit une filtration par l'ordre du pôle P, sur le complexe de de Rham algébrique du complément à un diviseur D lisse de $\mathbb{P}^n$ l'espace projectif complexe. Il montre que toute classe de cohomologie peut être représentée par une forme dont le pôle est d'ordre au plus n le long de D. De plus, il exhibe une base du groupe de cohomologie de degré n.

La majoration de l'ordre du pôle a été généralisée dans [3] au complément à une hypersurface de $\mathbb{P}^n$ non nécéssairement lisse. Pour le cas $n = 2$ voir aussi [1].

Nous nous proposons dans cet article d'améliorer la majoration de l'ordre du pôle pour des diviseurs réductibles de $\mathbb{P}^2$. Le résultat principal est le suivant :

THÉORÈME 1. – *Soient $C_1, \ldots, C_n$ n courbes de $\mathbb{P}^2$ définies par les équations irréductibles $f_1 = 0, \ldots, f_n = 0$. Alors $H^2(\mathbb{P}^2 \backslash \bigcup_{i=1}^n C_i)$ est engendré par les formes*

$$\frac{P\Omega}{f_{i_1} f_{i_2} f_{i_3}}, \quad 1 \leqslant i_1, i_2, i_3 \leqslant n,$$

où Ω est la contraction de la forme volume de l'espace affine $\mathbb{A}^3$ par le champ de vecteurs d'Euler.

Sauf mention du contraire, les groupes de cohomologie sont toujours à coefficients dans $\mathbb{C}$. Si l'on pose $U=\mathbb{P}^2\setminus\bigcup_{i=1}^n C_i$, alors U est une variété affine, donc d'après [10], U a le type topologique d'un CW-complexe de dimension 2. Donc $b_k(U)=0$, pour tout $k>2$, $b_k(U)$ étant le k-ième nombre de Betti de U.

Comme U est connexe, $b_0(U)=1$ et nous savons, d'aprés [4] que $b_1(U)=b^0_{2n-2}(C)=n(C)-1$ où $n(C)$ est le nombre de composantes irréductibles de la courbe C. Si l'on décompose g en ses facteurs irréductibles $g=g_1\dots g_k$, il est facile de voir que les formes :

$$\omega_i=(dg_i)/g_i-(n_i/n)(dg/g)$$

où $n_i=\deg g_i$ et $n=d$, engendrent $H^1(U)$ et ont pour unique relation : $\sum\omega_i=0$. Le reste de cet article est donc dévolu a l'étude de $H^2(U)$.

L'auteur tient à remercier l'arbitre pour ses précisions concernant certains points de l'article.

2. Cas de deux courbes

Nous commencons par étudier le cas de deux courbes : C_1 et C_2. Si l'on note $U_1=\mathbb{P}^2-C_1$ et $U_2=\mathbb{P}^2-C_2$ on peut écrire la suite exacte longue de Mayer–Vietoris :

$$\begin{aligned}&\to H^2(U_1\cup U_2)\xrightarrow{\alpha} H^2(U_1)\oplus H^2(U_2)\to H^2(U_1\cap U_2)\\&\xrightarrow{\delta} H^3(U_1\cup U_2)\to 0.\end{aligned}$$

En effet, comme U_1 et U_2 sont des surfaces affines complexes, d'après [10], U_1 et U_2 ont le type topologique d'un CW-complexe de dimension 2 et donc $H^3(U_1)=H^3(U_2)=0$. Si l'on pose $A=\mathbb{P}^2\setminus(U_1\cup U_2)$, A est fini donc la suite exacte :

$$H_2(A)=0\to H_2(\mathbb{P}^2)=\mathbb{C}\to H_2(\mathbb{P}^2,A)\to \tag{1}$$

$$\to H_1(A)=0 \tag{2}$$

donne $H^2(U_1\cup U_2)=\mathbb{C}$ par la dualité d'Alexander. Pour finir, on écrit :

$$H^1(U_1)\oplus H^1(U_2)\to H^1(U_1\cap U_2)\xrightarrow{\delta'} H^2(U_1\cup U_2)\to \tag{3}$$

avec $H^2(U_1 \cup U_2) = \mathbb{C}$ et $b_1(U_1) = n(C_1) - 1$, $b_1(U_2) = n(C_2) - 1$, $b_1(U_1 \cap U_2) = n(C_1) + n(C_2) - 1$, où $n(C_i)$ désigne le nombre de composantes irréductibles de la courbe C_i et donc δ' est un épimorphisme. Le fait que δ' soit un épimorphisme implique que $\alpha = 0$.

Les résultats de [7] dans le cas lisse et de [3,1] s'appliquent à $H^2(U_1)$ et $H^2(U_2)$. Pour décrire $H^2(U_1 \cap U_2)$, il suffit donc de trouver une caractérisation de $H^3(U_1 \cup U_2)$.

On a la suite exacte suivante :

$$H^3(\mathbb{P}^2) \to H^3(\mathbb{P}^2 \backslash (C_1 \cap C_2)) \to H^4(\mathbb{P}^2, \mathbb{P}^2 \backslash (C_1 \cap C_2)) \xrightarrow{\psi} H^4(\mathbb{P}^2)$$

où $H^3(\mathbb{P}^2) = 0$, $H^4(\mathbb{P}^2, \mathbb{P}^2 \backslash (C_1 \cap C_2)) \simeq \mathbb{C}^{|C_1 \cap C_2|}$ par la dualité d'Alexander, $H^4(\mathbb{P}^2) \simeq \mathbb{C}$ et ψ est donnée par :

$$\psi((\alpha_1, \ldots, \alpha_{|C_1 \cap C_2|}) = \sum \alpha_i.$$

On peut donc voir $H^3(U_1 \cup U_2)$ comme le sous-espace de $\mathbb{C}^{|C_1 \cap C_2|}$ donné par $\ker \psi$. Le morphisme de connection δ de la suite de Mayer–Vietoris peut alors s'écrire :

$$\delta : H^2(U_1 \cap U_2) \to \mathbb{C}^{|C_1 \cap C_2|} \supset H^3(U_1 \cup U_2),$$
$$\omega \mapsto (\mathrm{Res}_{p_i} \omega)_{p_i \in C_1 \cap C_2}.$$

D'après le théorème des résidus [5, p. 656], $\sum_{p_i \in C_1 \cap C_2} \mathrm{Res}_{p_i}(\omega) = 0$, donc l'image de δ est bien contenue dans $H^3(U_1 \cup U_2)$.

Dans tout ce chapitre $\mathbb{C}_d[X_1, \ldots, X_n]$ designera l'espace des polynômes homogènes de degré d en les variables $X_1, \ldots, X_n$ à coefficients complexes.

Nous pouvons définir une application :

$$\phi : \mathbb{C}_{d_1+d_2-3}[X, Y, Z] \to H^3(U_1 \cup U_2) = \mathbb{C}^{|C_1 \cap C_2|-1},$$
$$P \to \left(\mathrm{Res}_{p_i} \frac{P\Omega}{f_1 f_2}\right)_{p_i \in C_1 \cap C_2}$$

où Ω est la contraction de la forme volume de l'espace affine $\mathbb{A}^3$ par le champ de vecteurs d'Euler. De manière plus explicite, si (X, Y, Z) est un système de coordonnées de l'espace affine $\mathbb{A}^3$ alors :

$$\Omega = X\,dY \wedge dZ - Y\,dX \wedge dZ + Z\,dX \wedge dY.$$

Le résultat suivant est bien connu, voir [8, 11, Section 7].

THÉORÈME 2. – *L'application ϕ est surjective.*

Nous proposons une courte démonstration de ce théorème qui nous sera utile par la suite. Rappelons brièvement comment on peut définir la filtration de Hodge sur la cohomologie de $U = \mathbb{P}^2 \backslash (C_1 \cup C_2)$ et plus généralement sur la cohomologie de toute variété algébrique d'après [2]. Nous savons qu'il existe un morphisme birationnel $\pi : X \to \mathbb{P}^2$ avec X une variété projective $D = \pi^{-1}(C_1 \cup C_2)$ un diviseur à croisements normaux de X. Le morphisme π induit un isomorphisme $X \backslash D \simeq U$. Soit j l'inclusion de U dans X. On a

$$H^*(U) = \mathbb{H}^*(X, \mathrm{Rj}_* \mathbb{C}_\mathrm{U}) = \mathbb{H}^*\bigl(\mathrm{X}, \Omega^*_\mathrm{X}(\log \mathrm{D})\bigr)$$

où $\Omega^*_X(\log D))$ désigne le complexe logarithmique.

La première suite spectrale d'hypercohomologie du complexe de faisceaux $\Omega^*_X(\log D)$ coïncide avec la suite spectrale d'hypercohomologie du complexe filtré $(\Omega^*_X(\log D), \sigma_{\geqslant})$:

$$E_1^{p,q} = H^q\bigl(X, \Omega^p_X(\log D)\bigr) \Rightarrow \mathbb{H}^{p+q}\bigl(X, \Omega^*(\log D)\bigr).$$

Cette suite spectrale dégénère en E_1 d'après [2]. En particulier :

$$F^2 H^2(U) \simeq \Gamma\bigl(X, \Omega^2(\log D)\bigr).$$

La démonstration du Théorème 2 utilise le point 2 du lemme suivant :

LEMME 1. – (1) $F^1(H^2(U_1 \cap U_2)) = H^2(U_1 \cap U_2)$.
(2) $F^2(H^3(U_1 \cup U_2)) = H^3(U_1 \cup U_2)$.

Démonstration. – (1) D'après [2, p. 39], il suffit de montrer que $h^{0,2}(H^2(U_1 \cap U_2)) = 0$. Le résultat de [6] montre que les nombres de Hodge se comportent bien pour la dualité d'Alexander :

$$h^{0,2}\bigl(H^2(U_1 \cap U_2)\bigr) = h^{2,0}\bigl(\mathbb{P}^2, C_1 \cup C_2\bigr).$$

La suite exacte longue :

$$\to H^1(C_1 \cup C_2) \to H^2\bigl(\mathbb{P}^2, C_1 \cup C_2\bigr) \to H^2\bigl(\mathbb{P}^2\bigr) \to$$

où $H^2(\mathbb{P}^2)$ est de type (1,1) et $h^{2,0}(H^1(C_1 \cup C_2)) = 0$ ce qui permet de conclure.

(2) En utilisant la première partie et [2] p. 39, il suffit de montrer que $h^{1,2}(H^3(U_1 \cap U_2)) = 0$. On procède de la même manière que dans la démonstration précédente.

Preuve du Théorème 1 pour $n = 2$. – D'après le lemme, nous avons la suite exacte :

$$
\begin{aligned}
F^2\bigl(H^2(U_1)\bigr) \oplus F^2\bigl(H^2(U_2)\bigr) &\xrightarrow{\rho} F^2\bigl(H^2(U_1 \cap U_2)\bigr) \\
&\xrightarrow{\delta} H^3(U_1 \cup U_2) \to 0.
\end{aligned} \tag{4}
$$

Cela veut dire que, pour n'importe quelle classe de cohomologie α de $H^3(U_1 \cup U_2)$, on peut trouver une forme différentielle ω telle que $\delta(\omega) = \alpha$ et où $\pi^*(\omega)$ est une forme du complexe logarithmique de degré 2. En particulier, $\pi^*(\omega)$ a des pôles simples le long de $\pi^{-1}(C_1 \cup C_2)$ donc ω a des pôles simples le long de $C_1 \cup C_2$ car π est un isomorphisme en dehors d'un ensemble de codimension 2 (étant une composition d'éclatements de points). $\square$

COROLLAIRE 1. – *Si l'on pose $U = U_1 \cap U_2$, nous avons* :

(1) $\dim Gr_F^1 H^2(U) = \dim Gr_F^1 H^2(U_1) + \dim Gr_F^1 H^2(U_2)$,

(2) $\dim Gr_F^2 H^2(U) = \dim Gr_F^2 H^2(U_1) + \dim Gr_F^2 H^2(U_2) + |C_1 \cap C_2| - 1$.

Démonstration. – Nous avons les suites exactes suivantes :

$$
\begin{aligned}
0 \to F^1\bigl(H^2(U_1) \oplus F^1(H^2(U_1)\bigr) \\
\to F^1 H^2(U) \to F^1 H^3(U_1 \cup U_1),
\end{aligned} \tag{5}
$$

$$
0 \to F^2 H^2(U_1) \oplus F^2 H^2(U_1) \to F^2 H^2(U) \to F^2 H^3(U_1 \cup H_2). \tag{6}
$$

La première partie du corollaire découle immédiatement des deux suites exactes précédentes et de l'égalité :

$$
F^1 H^3(U_1 \cup U_1) = F^2 H^3(U_1 \cup H_2).
$$

La deuxième partie provient de la deuxième suite exacte et du fait que $\dim H^3(U_1 \cup U_2) = |C_1 \cap C_2| - 1$. $\square$

3. Cas de n courbes

Preuve du Théorème 1. – Nous allons faire une preuve par récurrence. Le théorème est vrai pour

(1) $n = 2$ d'après la Section 2 plus haut.
(2) $n = 3$ en appliquant le Théorème 1 aux courbes d'équations $(f_1 f_2, f_3)$.

Pour poursuivre la démonstration nous aurons besoin du résultat suivant :

PROPOSITION 1. – *Soient $P_1, \ldots, P_n$ les points d'intersection des courbes $C_1, \ldots, C_\nu$ et soient $R_1, \ldots, R_n$ tels que $\sum R_i = 0$ alors il existe une forme fermée ω engendrée par les $\frac{P\Omega}{f_i f_j f_k}$ telle que* $\mathrm{Res}_{p_i} \omega = R_i$.

Démonstration. – On considère le graphe dont les sommets sont les points $P_1, \ldots, P_n$. Deux points sont reliés par une arête s' ils sont sur une même courbe.

Soient les points (P_i, λ_i) munis de poids tels que $\sum \lambda_i = 0$. Si P_k et P_l sont sur une même arête, on considère les transformations :

$$\tau_{kl}\big((P_k, \lambda_k), \lambda\big) = (P_k, \lambda_k + \lambda),$$

$$\tau_{kl}\big((P_l, \lambda_l), \lambda\big) = (P_l, \lambda_l - \lambda),$$

$$\tau_{kl}\big((P_m, \lambda_m), \lambda\big) = (P_m, \lambda_m) \quad m \neq k, l. \qquad \square$$

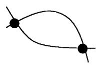
On a le lemme :

LEMME 2. – *Il existe une suite finie $(k_i, l_i, \lambda_i) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{C}$, $i \in \{1 \ldots p\}$, telle que $\forall i \in \{1 \ldots p\}$, P_{k_i} et P_{l_i} soient sur une même arête et*

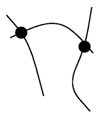
$$\circ \tau_{k_i l_i}(\lambda_i)\big((P_1, 0), \ldots, (P_N, 0)\big) = \big((P_1, R_1), \ldots, (P_N, R_N)\big).$$

Considérons l'application ϕ qui a une forme $\omega = \frac{P\Omega}{f_i f_j f_k}$ fait correspondre $((P_1, \mathrm{Res}_{p_i} \omega), \ldots, (P_N, \mathrm{Res}_{p_N} \omega))$ alors pour tout triplet (k_i, l_i, λ_i) permis, il existe une forme ω_0 telle que $\phi(\omega + \omega_0) = \tau_{k_i, l_i}(\lambda)(\phi(\omega))$.

Démonstration. – Deux cas :



(1) Si P_k et P_l sont traversés par deux courbes alors ω_0 est de la forme $\frac{P\Omega}{f_\tau f_{\tau'}}$ en utilisant le théorème avec $k=2$.



(2) Si P_k et P_l sont traversés par trois courbes alors ω_0 est de la forme $\frac{P\Omega}{f_\tau f_{\tau'} f_{\tau''}}$ en utilisant le théorème avec $k=3$.

$\square$

Fin de la démonstration. – On a la suite exacte :

$$H^2\big(\mathbb{P}^2\backslash C_{k+1}\big) \oplus H^2\left(\mathbb{P}^2\backslash \bigcup_{i=1}^{k} C_i\right) \to H^2\left(\mathbb{P}^2\backslash \bigcup_{i=1}^{k+1}\right)$$
$$\to^{\delta} H^3\left(\mathbb{P}^2\backslash C_{k+1} \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k} C_i\right)\right) \to 0.$$

Soient $P_1, \ldots, P_N$ les points d'intersection de $C_{k+1} \cap (\bigcup_{i=1}^k C_i)$. Le morphisme δ s'écrit :

$$\delta : H^2\left(\mathbb{P}^2\backslash \bigcup_{i=1}^{k+1} C_i\right) \to \mathbb{C}^{N-1},$$
$$\omega \to (\mathrm{Res}_{p_1}\omega, \ldots, \mathrm{Res}_{p_N}\omega),$$

l'hypothèse de récurrence et le théorème permettent de conclure. $\square$

Remarque 1. – On peut utiliser le résultat de [9] pour réduire le cas $n > 3$ au cas $n = 3$.

La théorie de Hodge donne des informations supplémentaires que nous allons utiliser dans les exemples qui suivent.

On considère l'application :

$$j : \mathbb{C}_{d_1+d_2-3}[X, Y, Z] \to H^2\big(\mathbb{P}^2\backslash (C_1 \cup C_2)\big),$$
$$h \to \left[\frac{h\Omega}{f_1 f_2}\right].$$

Soient

$$V_0 = \big\{h \in \mathbb{C}_{d_1+d_2-3}[X, Y, Z]/ \quad j(h) \in \mathrm{Im}\,\rho\big\}$$

où ρ a été défini dans la suite exacte (4).

$$V = \{h \in \mathbb{C}_{d_1+d_2-3}[X,Y,Z]/ \quad j(h) \in F^2\big(H^2(U_1 \cap U_2)\big)\}.$$

Alors on a $V_0 = V \cap (f_1, f_2)$. En effet, V est l'ensemble des h tels que $\pi^*(j(h)) \in \Gamma(\Omega^2(\log(X))$ où (π, X) est une résolution de $\mathbb{P}^2 \backslash (C_1 \cup C_2)$. Si par exemple, $\omega \in F^2(H^2(U_1))$ alors $\pi^*(\omega)$ ne peut avoir de pôles qu'au dessus de $\pi^{-1}(C_1)$ et ces pôles sont simples. Donc ω ne peut avoir de pôle que le long de C_1 et ces pôles sont simples. Donc $h \in (f_2)$.

Ainsi si l'on pose $\widetilde{V} = V/V_0$ alors j définit un isomorphisme de $\delta(\widetilde{V})$ dans $\operatorname{Im}\delta$.

4. Exemples

Rappelons tout d'abord les résultats de l'article [7] dans le contexte dans lequel nous allons les utiliser. Si C est une courbe lisse de $\mathbb{P}^2$ donnée par une équation $f \in \mathbb{C}_d[X,Y,Z]$, nous pouvons définir une filtration par l'ordre du pôle (P) sur le complexe de de Rham algébrique du complément $U = \mathbb{P}^2 \backslash C$ à la courbe C par :

$$P^p\big(\Gamma\big(\Omega^q(U)\big)\big) = \big\{\omega \in \Gamma\big(\Omega^q(U)\big); \operatorname{ord}_C(\omega) \leqslant q - p + 1\big\}.$$

Cette filtration induit une filtration sur la cohomologie de U et nous avons les inclusions :

$$0 = P^3\big(H^2(U)\big) \subseteq P^2\big(H^2(U)\big) \subseteq P^1\big(H^2(U)\big) = H^2(U).$$

Nous avons les isomorphismes suivants :

$$\mathbb{C}_{d-3}[X,Y,Z] \to P^2\big(H^2(U)\big) \quad h \to \text{classe de } \frac{h\Omega}{f} \text{ dans } P^2\big(H^2(U)\big), \tag{7}$$

$$\left(\mathbb{C}[X,Y,Z]/\left(\frac{\partial f}{\partial X}, \frac{\partial f}{\partial Y}, \frac{\partial f}{\partial Z}\right)\right)_{2d-3} \to Gr_P^1\big(H^2(U)\big),$$
$$h \mapsto \text{classe de } \frac{h\Omega}{f^2} \text{ dans } Gr_P^1\big(H^2(U)\big),$$

où $(\mathbb{C}[X,Y,Z]/(\frac{\partial f}{\partial X}, \frac{\partial f}{\partial Y}, \frac{\partial f}{\partial Z}))_{2d-3}$ désigne la composante homogène de degré $2d-3$ de l'anneau gradué $(\mathbb{C}[X,Y,Z]/(\frac{\partial f}{\partial X}, \frac{\partial f}{\partial Y}, \frac{\partial f}{\partial Z}))$.

De plus, $\mathrm{Gr}^1_P(H^2(U))$ et $P^2(H^2(U))$ ont la même dimension qui correspond au genre de la courbe C.

Si maintenant, C est réunion de deux courbes lisses C_1 et C_2 données par des équations $f_1=0$ et $f_2=0$ de degrés respectifs d_1 et d_2, grâce aux résultats de cet article nous pouvons écrire :

$$H^2(U_1)\oplus H^2(U_2)\oplus \widetilde{V}\simeq H^2(U_1\cap U_2).$$

Pour avoir une base de $H^2(U_1\cap U_2)$, il nous suffit donc d'obtenir une base de l'espace vectoriel $\widetilde{V}$ ce que nous faisons dans les exemples suivants.

Remarque 2. – La propriété qu'une forme ω soit dans $F^2(H^2(\mathbb{P}^2\backslash (C_1\cup C_2)))$ se vérifie localement en chaque point singulier p en calculant une désingularisation locale de $C_1\cup C_2$. Si p est une singularité de type A_1 c'est-à-dire si C_1 et C_2 se coupent transversalement en p alors il n'y a aucune condition à vérifier.

Pour les singularités de type A_3 on obtient une condition très simple et indépendante des coordonnées locales : si $\omega=\frac{h\Omega}{f_1f_2}$ alors il suffit que $h(p)=0$.

Exemple 1. – On considère les courbes C_1 et C_2 donnée par leurs équations homogènes :

$$C_1\colon\ XY+YZ+ZX=0,$$

$$C_2\colon\ X^2(X+Z)+Y^2(X+Z)+Z^2(X+Y)=0.$$

Ces deux courbes s'intersectent en trois points A, resp. B, resp. C de coordonnées homogènes $(1:0:0)$, resp. $(0:1:0)$, resp. $(0:0:1)$ qui sont singuliers de type A_3 pour la réunion $C_1\cup C_2$. D'après la remarque :

$$\omega=\frac{h\Omega}{f_1f_2}\in F^2\big(H^2\big(\mathbb{P}^2\backslash (C_1\cup C_2)\big)\big)\Rightarrow h(A)=h(B)=h(C)=0.$$

Une base de $\widetilde{V}$ est donc : XY, YZ car

$$[XZ]=-[XY]-[YZ]$$

dans $\widetilde{V}$.

Et une base de $H^2(\mathbb{P}^2\backslash C_1 \cup C_2)$ est donc donnée par les classes des formes :

$$\left(\frac{\Omega}{f_2}, \frac{\mathrm{hess}(f_2)\Omega}{f_2^2}, \frac{XY\Omega}{f_1 f_2}, \frac{YZ\Omega}{f_1 f_2}\right).$$

EXEMPLE 2. – On considère la courbe de l'espace affine $\mathbb{C}^2$ donnée par son équation $(f = 0)$

$$f = f_0 + \cdots + f_d$$

que l'on décompose en somme de composantes homogènes. On suppose que les conditions suivantes sont vérifiées :

- la courbe C de $\mathbb{P}^2$ définie par l'homogènéisée de f: $\tilde{f}(X, Y, Z) = f_0 Z^d + \cdots + f_d$ est lisse.
- Soit L_∞: $Z = 0$ la droite à l'infini. Alors $|L_\infty \cap C| = d$.

On veut calculer $\delta(H^2(\mathbb{P}^2\backslash\{C \cup L_\infty\}))$. D'après le théorème de Bezout tous les points d'intersections de L_∞ avec C sont simples. On peut donc prendre pour base de $\widetilde{V}$, $(X^i Y^{d-2-i})_{i=0}^{d-2}$.

Comme $H^2(\mathbb{P}^2\backslash L_\infty) = 0$, on a

$$H^2\left(\mathbb{P}^2\backslash\{C \cup L_\infty\}\right) \simeq \mathbb{C}_{d-3}[X, Y, Z] \oplus \left(\mathbb{C}[X, Y, Z]/\left(\frac{\partial f}{\partial X}, \frac{\partial f}{\partial Y}, \frac{\partial f}{\partial Z}\right)\right)_{2d-3} \oplus \widetilde{V}.$$

5. Cohomologie de la fibre générique

Soit $C \in \mathbb{P}^2$ une courbe réduite d'équation $g = 0$, $g \in P[X, Y, Z]$ un polynôme homogène de degré d. Alors $U = \mathbb{P}^2 - C$ est une surface affine complexe. On se donne une fonction régulière f sur U que l'on supposera toujours non constante. Nous savons alors qu'il existe un ensemble minimal $B \subset \mathbb{C}$ tel que si S désigne le complément de B dans $\mathbb{C}$ et si l'on pose $X = f^{-1}(S)$ alors f réalise une fibration localement triviale de X au dessus de S. Par la suite nous désignerons par F la fibre de cette fibration.

Dans cette section, nous donnons une méthode pour exhiber une base explicite de la cohomologie de la fibre générique.

Nous avons la suite de Gysins suivante :

$$H^1(U\backslash F) \overset{\text{res}}{\to} H^0(F) \overset{\partial}{\to} H^2(U) \to H^2(U\backslash F) \overset{\text{res}}{\to} H^1(F) \overset{\partial}{\to} H^3(U)$$

où res désigne le morphisme résidu.

On peut maintenant comparer cette dernière suite avec la suite de Mayer–Vietoris :

$$0 \to H^2(U) \oplus H^2(\mathbb{P}^2\backslash\overline{F}) \to H^2(U\backslash F) \overset{\text{res}}{\to} \mathbb{C}^{\sharp-1} \to 0$$

où $\overline{F}$ est la fermeture de F dans $\mathbb{P}^2$ et $\sharp$ désigne le cardinal de $\overline{F} \cap C$.

Les résultats de la section précédente nous permettent de calculer des bases explicites pour $H^2(U\backslash F)$. En prenant le résidu, cela donne des bases explicites de la cohomologie de de Rham de $H^1(F)$.

EXEMPLE 3. – Nous conservons les notations de la section précédente avec les définitions suivantes pour f et g

$$g = xyz, \qquad f = \frac{x^3 + y^3 + z^3}{xyz}.$$

L'équation de la fibre en t est :

$$F_t\colon\ xyz - t\big(x^3 + y^3 + z^3\big) = 0.$$

De plus on peut prendre pour S :

$$S = \mathbb{C}\backslash\{3, 3\varepsilon, 3\varepsilon^2\},$$

avec $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$.

Une base pour $H^2(U\backslash F)$ est donnée en mettant ensemble :

(1) une base pour $H^2(\mathbb{P}^2\backslash C_f)$, par exemple

$$\frac{\Omega}{f}, \quad \frac{XYZ\Omega}{f^2};$$

(2) une base pour $H^2(\mathbb{P}^2\backslash C_g) = H^2(\mathbb{A}^2\backslash\{XY = 0\})$, par exemple :

$$\frac{d\frac{X}{Z}}{\frac{X}{Z}} \wedge \frac{d\frac{Y}{Z}}{\frac{Y}{Z}} = \frac{\Omega}{g};$$

(3) une base pour l'espace $\widetilde{V} = \left(\frac{\mathbb{C}[X,Y,Z]}{(g,f)}\right)_3$ donc les 8 monômes de degré 3 dans $\mathbb{C}$ différents de XYZ et de X^3.

Ce calcul nous donne 11 formes différentielles. La forme $\frac{\Omega}{f^2}$ est dans le noyau du résidu et donc les 10 autres résidus forment une base pour $H^1(F)$.

RÉFÉRENCES

[1] Atiyah M.F., Bott R., Gording L., Lacunas for hyperbolic differential operators with constant coefficients. I, Uspehi Mat. Nauk 26 (2(158)) (1971) 25–100. Translated from the English by Egorov Ju.V. and Oniščik A.L.

[2] Deligne P., Théorie de Hodge II, Publ. I.H.E.S 40 (1971) 5–57.

[3] Deligne P., Dimca A., Filtrations de Hodge et par l'ordre du pôle pour les hypersurfaces singulières, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 23 (1990) 645–656.

[4] Dimca A., Singularities and Topology of Hypersurfaces, Springer-Verlag, 1992.

[5] Griffiths P., Harris J., Principles of Algebraic Geometry, Wiley, 1994.

[6] Fujiki A., Duality of mixed Hodge structures of algebraic varieties, Publ. RIMS. Kyoto Univ. 16 (1980) 635–667.

[7] Griffiths P., Periods of integrals on algebraic manifolds, Bull. Amer. Math. Soc. 75 (1970) 228–296.

[8] Griffiths P., Variations on a theorem of Abel, Inventiones Mathematicae 35 (1976) 321–390.

[9] Leĭnartas E.K., Factorization of rational functions of several variables into partial fractions, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. 10 (197) (1978) 47–51.

[10] Milnor J., Morse Theory, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1963. Based on lecture notes by Spivak M. and Wells R., Annals of Mathematics Studies, No. 51.

[11] Tsikh A.K., Multidimensional Residues and Their Applications, American Mathematical Society, Providence, RI, 1992. Translated from the 1988 Russian original by Primrose E.J.F..